

Chapitre 1

Tenseurs de contraintes et de déformations

1.1 Introduction

Pour modéliser les phénomènes physiques de déformation et de rupture des matériaux, il faut une méthode fondée sur des principes généraux gouvernant les variables représentatives de l'état du milieu matériel (déformations, température.).

Deux types de modélisations sont nécessaires :

1. Méthode cinématique ou mécanique : Principe des puissances virtuels (conservation de l'énergie) pour schématiser les mouvements et les efforts dans le milieu

2. Méthode phénoménologique ou physique : Thermodynamique des milieux irréversibles pour introduire les variables caractéristiques des phénomènes étudiés. Le potentiel thermodynamique permet de définir les variables associés (contraintes, forces) aux variables observables (déformations, déplacements).

Nous nous intéressons dans ce cours à la modélisation du comportement élastoplastique des corps solides déformables.

1.2 Contraintes

1.2.1 Tenseur de contraintes.

Soit (O, a_1, a_2, a_3) un système d'axes orthonormés de R^3 , le tenseur des contraintes est défini par la matrice suivante:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} sont les contraintes normales et σ_{ij} pour $i \neq j$ sont les contraintes tangentielles.

1.2.2 Tenseur sphérique et tenseur déviatorique

Le tenseur des contraintes peut être décomposé en deux tenseurs appelés tenseur sphérique (σ_s) et tenseur déviatorique (s).

$$(\sigma) = (\sigma_s) + (s) \quad (1.2)$$

(σ_s) et (s) sont donnés par :

$$(\sigma_s) = \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma_{ij}) \cdot I \quad (1.3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) \cdot \delta_{ij} \quad (1.4)$$

où I est la matrice unité et δ_{ij} est le symbole de Kronecker

1.2.3 Invariants de contraintes

Il s'agit des invariants du tenseur de contraintes et de ceux du déviateur de contraintes.

Les invariants du tenseur de contraintes sont donnés par :

$$I_1 = \text{trace}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \\ &= -[\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{12} \sigma_{21} - \sigma_{13} \sigma_{31} - \sigma_{23} \sigma_{32}] \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$I_3 = \text{Det}(\sigma_{ij}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (1.7)$$

σ_1, σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales de (σ) .

Notons au passage que c'est la sommation d'Einstein sur les indices qui a été utilisée.

Les invariants du déviateur de contraintes s'expriment dans le repère principal du déviateur de contrainte, par :

$$J_1 = s_{ii} = 0 \quad (1.8)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (1.9)$$

$$J_3 = \text{Det}(s_{ij}) = s_1 s_2 s_3 \quad (1.10)$$

1.3 Déformations

1.3.1 Tenseur des déformations

Soit u le champ de déplacements que subissent les points d'un milieu continu lors de sa déformation. Ses composantes, dans un repère orthonormé, seront désignées par $u_i (i = 1, 2, 3)$.

La déformation du milieu est caractérisée par le tenseur symétrique des déformations suivant :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Les composantes du tenseur précité sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.12)$$

où $x_i (i = 1, 2, 3)$ sont les coordonnées cartésiennes des points du milieu continu.

Comme tout tenseur symétrique, le tenseur des déformations, réduit aux axes principaux, a la forme suivante :

$$(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont appelés «allongements principaux ». Ceux-ci sont portés par trois directions orthogonales appelées directions principales. Ainsi toute déformation peut être réalisée par des tractions simples dans ces trois directions .

1.3.2 Petites déformations

S'il s'agit d'une petite déformation, les composantes ε_{ij} sont petites en module par rapport à l'unité. Si, en outre, les angles de rotation des éléments d'un corps l'un par rapport à l'autre s'avèrent suffisamment petits, on peut alors, dans les formules (1.12), négliger les termes du second ordre et par conséquent, les composantes du tenseur de déformation prennent les formes suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

La variation relative de volume est donnée par :

$$e_m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (1.15)$$

1.2.4 Tenseur déviateur de déformations

Le tenseur $[\varepsilon_{ij}]$ peut être décomposé en deux parties, la partie sphérique associée au changement dans le volume et la partie déviatorique associée au changement dans la forme (distorsion).

$$[\varepsilon_{ij}] = [e_{ij}] + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} [\delta_{ij}]. \quad (1.16)$$

$[e_{ij}]$ représente le tenseur déviateur de déformation défini par :

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

et qui s'exprime avec les déformations principales par :

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

1.3.4 Invariants de déformation

Les invariants du tenseur des déformations sont donnés par :

$$I_1 = \text{trace}(\varepsilon) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (1.19)$$

$$I_2 = -(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3), \quad (1.20)$$

$$I_3 = \text{Det}(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (1.21)$$

Les invariants du déviateur de déformations s'expriment par :

$$J'_1 = e_{ii} = 0 \quad (1.22)$$

$$J'_2 = \frac{1}{3} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \quad (1.23)$$

$$J'_3 = \text{Det}(e_{ij}) = e_1 e_2 e_3 \quad (1.24)$$

où e_1, e_2, e_3 sont les composantes principales du déviateur de déformation.

Chapitre 2

Loi de comportement

2.1 Loi de comportement

Par loi de comportement, nous entendons la manière dont le matériau s'oppose à la sollicitation ; cette loi peut être linéaire ou non. En un point donné, elle peut dépendre de la position de ce point sur le matériau considéré, de la température et du temps.

Dans cette section nous définirons, pour les solides élastiques, une relation entre les composantes du tenseur des contraintes et les composantes du tenseur des déformations.

On parle de linéarité physique lorsque les relations traduisant la loi de comportement sont linéaires. Si le tenseur des déformations est aussi linéarisé (cas de petites déformations), on parle alors de linéarité géométrique. S'il y a simultanément linéarité physique et linéarité géométrique, alors la théorie à introduire est celle de l'élasticité linéaire faisant l'objet du reste de ce chapitre.

2.2.1 *Loi élastique linéaire des matériaux isotropes* 1678, Robert Hooke, (1635-1703)

Dans le cadre de l'élasticité linéaire les relations contraintes-déformations peuvent être exprimées par l'égalité indicielle suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

où C_{ijkl} est la matrice des constantes élastiques caractérisant le matériau. La condition de symétrie des tenseurs de déformations et de contraintes conduit aux égalités suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (2.2)$$

Pour un matériau élastique linéaire et isotrope, les relations de comportement sont appelées lois de Hooke généralisées et elles s'écrivent comme suit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} [\delta_{ij}] + 2G [\varepsilon_{ij}]. \quad (2.3)$$

Dans ce cas, il y a seulement deux paramètres indépendants, λ et G , appelés constantes de Lamé.

Inversement les déformations peuvent être également exprimées en fonction des contraintes par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda \delta_{ij}}{2G(3\lambda + 2G)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij}. \quad (2.4)$$

Si E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson (**Siméon Denis Poisson** (21 juin 1781 à [Pithiviers](#) - 25 avril 1840 à [Sceaux](#))) d'un matériau isotrope, les relations déformations-contraintes deviennent :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.5)$$

Inversement on a :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

Les constantes de Lamé, λ et G s'expriment par :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.7)$$

En définitive, la matrice des coefficients de l'élasticité peut s'écrire comme

suit :

$$[C_{ijkl}] = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (2.8)$$

1.4.2 Ecriture matricielle de la loi de Hooke

On définit les composantes des contraintes et des déformations par les vecteurs suivants:

$$[\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

L'équation (2.3) devient :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}. \quad (2.10)$$

$[C]$ est la matrice des constantes élastiques donnée par :

$$[C] = \frac{\lambda}{\nu} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

L'équation (2.4) peut aussi être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1}\{\sigma\} = [D]\{\sigma\} \quad (2.12)$$

où

$$[D] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

1.4.3 Cas de l'état plan de contraintes

Le cas des contraintes planes se traduit par le fait que :

$$\sigma_{33} = 0 \text{ et } \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.13)$$

Les relations contraintes-déformations prennent la forme simplifiée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

La déformation selon la troisième direction ε_{33} n'est pas nécessairement nulle et s'exprime par :

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.15)$$

1.4.4 Cas de l'état plan de déformations

Dans ce cas on a :

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.16)$$

Par conséquent les relations contraintes-déformations et leurs inverses deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

et
$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.18)$$

1.4.5 Cas axisymétrique

Considérons un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Le cas axisymétrique correspond au cas où les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta r} = 0 \text{ et } \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta r} = 0 \quad (2.19)$$

Les relations de comportement et leurs inverses s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Chapitre 3

Théorèmes généraux de l'énergie

3.1 Principe des travaux virtuels

Plaçons-nous dans le cadre de la linéarité géométrique (petites déformations). Considérons un état élastique I caractérisé par le tenseur de contraintes $[\sigma]$ et le vecteur de déplacement u . Dans un processus quasi-statique passons à un état II caractérisé par le même tenseur des contraintes et par le déplacement $u + \delta u$. Le matériau occupe le domaine Ω .

Prenons maintenant un sous domaine Δ , de frontière S , inclus dans Ω (Fig 3.1), et décrivons la variation du travail dans le passage de l'état I à l'état II. Les calculs peuvent être menés dans l'état I puisque les déplacements sont petits. Pour la même raison, la variation de la masse volumique sera négligée.

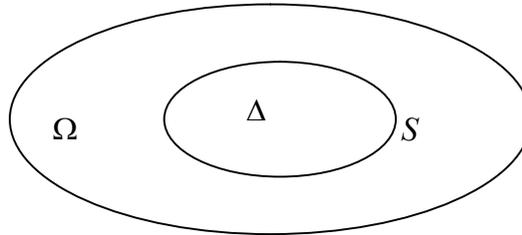


Fig. 3.1 Solide Ω

La variation du travail des forces extérieures $\delta\Phi_{ext}$ se compose du travail des forces de surface t appliquées sur S et des forces de volume \bar{f} dans ΔV :

$$\delta\Phi = \int_S t \cdot \delta u(P) dS + \int_{\Delta} \bar{f} \cdot \delta u dV, \quad (3.1)$$

or,
$$t = \sigma_{ij} n_j \bar{a}_i, \quad (3.2)$$

où \bar{a}_i est le vecteur unitaire de la direction i ,

donc :
$$\delta\Phi_{ext} = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_{\Delta} \bar{f}_i \delta u_i dV \quad (3.3)$$

Appliquons le théorème de la divergence à (3.3) :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{ext} &= \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) dV + \int_{\Delta} f_i \delta u_i dV \\ &= \int_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) + f_i \right) \delta u_i dV + \int_{\Delta} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les équations d'équilibre donnent :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) + f_i = 0 \quad (3.5)$$

L'expression (3.4) du travail se réduit à la relation suivante :

$$\Delta\Phi_{ext} = \int_{\Delta} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV \quad (3.6)$$

Remarquons que la linéarité géométrique conduit à :

$$\varepsilon_{ij}(u + \delta u) = \varepsilon_{ij}(u) + \varepsilon_{ij}(\delta u). \quad (3.7)$$

La variation des composantes du tenseur des déformations dans le passage de I à II est égale à :

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}(u + \delta u) - \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En tenant compte des relations (3.7) et (3.8), le principe des travaux virtuel s'exprime par la formule (3.9).

$$\delta\Phi_{ext} = \int_{\Delta} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV \quad (3.9)$$

3.2 Energie de déformation élastique

Dans le cas d'un corps élastique linéaire isotrope, l'énergie de déformation élastique par unité de volume, notée V_e , et l'énergie complémentaire W_e sont définies par la relation :

$$V_e = W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}. \quad (3.10)$$

En utilisant la loi de Hooke liant les contraintes et les déformations, la formule (3.10) devient :

- en fonction des déformations :

$$V_e = W_e = \frac{1}{2} [2G\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda(\text{trace}(\varepsilon))^2], \quad (3.11)$$

- en fonction des contraintes :

$$V_e = W_e = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\text{trace}(\sigma))^2 \right] \quad (3.12)$$

3.4 Théorèmes variationnels

Soit un solide Ω borné par une surface S en équilibre statique sous l'action des charges appliquées et des forces de volume (fig.3.1). Nous imposons des charges \bar{t} sur la frontière S_1 , partie de S , et des déplacements \bar{u} sur une partie S_0 de S .

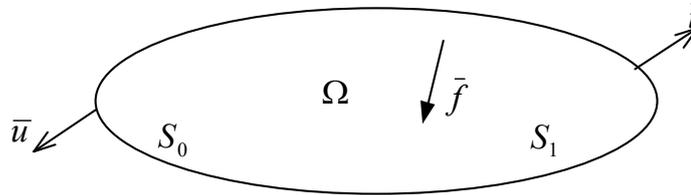


Fig. 3.1 Solide en équilibre statique

3.4.1 Champs cinématiquement admissible :

Un champ de déplacements u défini sur Ω est dit cinématiquement admissible, s'il est continûment dérivable dans Ω (c'est à dire qu'il est possible de calculer le tenseur de déformation) et s'il vérifie les conditions de déplacement sur S_0 :

$$u = \bar{u} \text{ en tout point de } S_0 \quad (3.13)$$

Par définition, l'énergie potentielle du système Ω est donnée par la relation :

$$\Phi_e = \int_{\Omega} V_e d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot u d\Omega - \int_{S_0} t \cdot \bar{u} dS, \quad (3.14)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels et les propriétés de symétrie et de bilinéarité de l'énergie de déformation élastique, on énonce les théorèmes variationnels suivants :

Théorème 1 : Parmi tous les champs cinématiquement admissibles pour un problème donné, le champ de déplacement réel est celui qui minimise l'énergie potentielle du système.

3.4.2 Champs statiquement admissible :

On dit qu'un champ de contrainte est statiquement admissible si, dans le domaine Ω , il est continûment dérivable et vérifie les équations d'équilibre et si à la frontière il vérifie les conditions de contraintes imposées sur S_1 .

$$t = \bar{t} \text{ pour tout point de } S_1. \quad (3.15)$$

L'énergie potentielle complémentaire est définie par la relation suivante :

$$\Phi_{ec}(\sigma) = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Omega} u \cdot \bar{f} d\Omega - \int_{S_1} (\sigma \cdot n) \cdot u dS, \quad (3.16)$$

Théorème2: Parmi tous les champs statiquement admissibles pour un système donné, le champ de contrainte réel est celui qui minimise l'énergie potentielle complémentaire du système.

3.5 Intérêt des théorèmes variationnels

L'approche de la solution d'un problème de l'élasticité par les théorèmes variationnels consiste en une minimisation d'une fonctionnelle, à savoir l'énergie potentielle ou l'énergie potentielle complémentaire. Dans le cadre de la programmation mathématique ce problème peut être résolu par un programme de minimisation. Il suffit donc d'établir la formulation éléments finis de la fonctionnelle à minimiser et d'utiliser par la suite un algorithme de résolution convenable au problème posé.

Chapitre 4

Critères tridimensionnel de limite élastique des métaux

Les essais expérimentaux sur les matériaux métalliques montrent que les surfaces de charges (ou les critères de plasticité) ne dépendent pas de la pression hydrostatique. Par conséquent, ces critères font intervenir uniquement le tenseur déviatorique de contraintes.

Les deux fonctions de charge généralement utilisées pour les métaux et qui seront illustrées par la suite sont celles de von Misès et de Tresca. Néanmoins, pour des raisons de simplicité, le modèle de Von Misès est mathématiquement plus convenable que celui de Tresca. En effet, ce dernier présente des singularités aux points anguleux de la surface de charge.

Soit $f(\sigma)$ la fonction de charge en termes de champ de contraintes de Cauchy σ . Elle est représentée classiquement par l'équation suivante :

$$f(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_y, \quad (4.1)$$

où σ_{eq} est une fonction de l'état de contraintes σ et diffère d'un modèle à un autre. σ_y est la limite élastique de traction propre au matériau considéré. On introduit alors les définitions suivantes de :

- ◆ critère de plasticité : $f(\sigma) \leq 0$
- ◆ domaine élastique : $K = \{\sigma \text{ tel que } f(\sigma) \leq 0\}$
- ◆ surface de charge : $\partial K = \{\sigma \text{ tel que } f(\sigma) = 0\}$

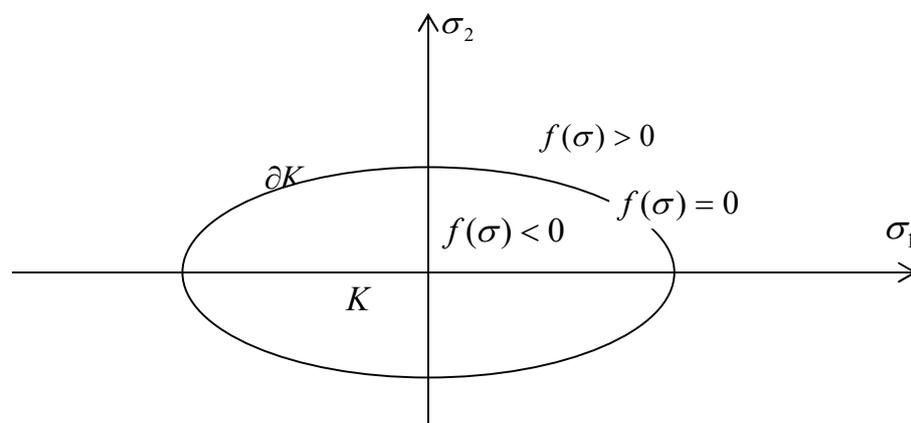


Fig. 4.1 Surface de charge plastique

2.2.1 Critère de von-Mises

Dans le critère de von-Mises, on considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Il est basé sur la contrainte équivalente :

$$\sigma_{eq} = J_2(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2}s_i^2}, \quad (4.2)$$

où s est le tenseur déviateur des contraintes et J_2 son second invariant.

Le critère de von Mises s'écrit :

$$f(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_y = 0. \quad (4.3)$$

Les expressions développées du critère de Von-Mises sont :

- dans l'espace à six dimensions :

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - \sigma_y^2 = 0. \quad (4.4)$$

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

- dans l'espace des contraintes principales, à trois dimensions :

$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - \sigma_y^2 = 0. \quad (4.5)$$

Dans l'espace des contraintes principales, l'équation (4.5) représente un cylindre à base circulaire axé sur la trisectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et de rayon

$$R = \sigma_y \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

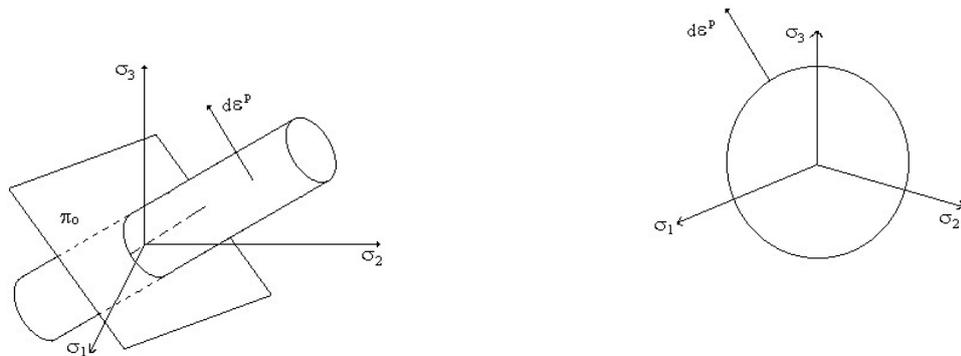


Fig 4.2 Critère de von-Mises dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Dans le cas particulier de l'état plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$), le critère se réduit, en axes principaux, à la forme suivante :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2, \quad (4.6)$$

qui représente une ellipse dans l'espace (σ_1, σ_2) .

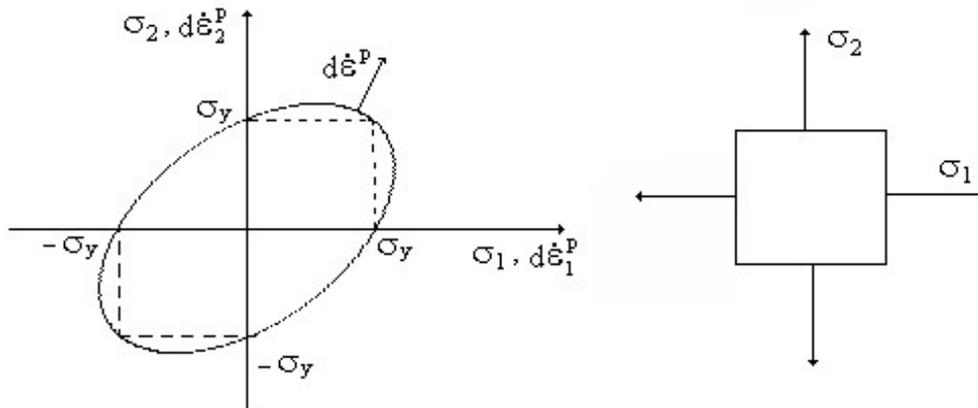


Fig. 4.3 Critère de von-Mises dans le plan principal (σ_1, σ_2)

2.2.2 Critère de Tresca

En 1864 Tresca, basé sur les résultats de Coulomb en mécanique des sols et sur l'extrusion des métaux, a proposé un critère de charge pour les matériaux métalliques, qui est connu sous le nom de « critère de Tresca ».

Ce critère considère que le seuil de plasticité n'est plus lié à l'énergie mais à la contrainte de cisaillement, et plus précisément à la contrainte tangentielle maximale. Il s'exprime par :

$$f(\sigma) = \sigma_{eq}(\sigma) - \sigma_Y = 0 \text{ avec } \sigma_{eq} = 2\tau_{\max}. \quad (4.7)$$

En termes de contraintes principales, l'équation (2.7) peut s'écrire :

$$\sigma_{eq} = \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\}, \quad (4.8)$$

ou encore,

$$\frac{1}{2} \sigma_{eq} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (4.9)$$

Dans l'espace des contraintes principales, le critère de Tresca est un prisme droit à base hexagonale régulière dont l'axe est la trisectrice du repère. Il est inscrit dans le cylindre de von Mises.

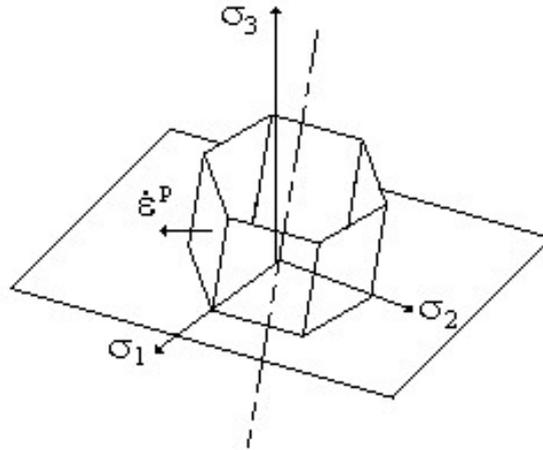


Fig. 4.4 Critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

En état plan de contrainte ($\sigma_3 = 0$), le critère de Tresca se réduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_Y \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \pm \sigma_Y \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_Y \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le système d'équations (4.10) représente l'hexagone de Tresca dans le plan (σ_1, σ_2) (Fig. 2.5).

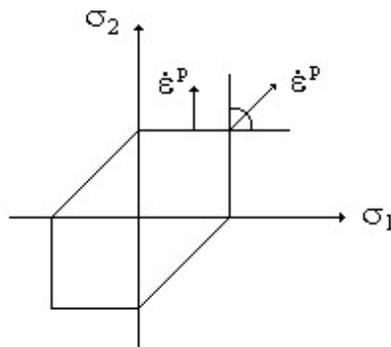


Fig. 4.5 Hexagone de Tresca

La fonction de charge n'est pas dérivable aux points des arêtes du prisme de Tresca,. En ces points singuliers, La loi d'écoulement prend la forme d'une inclusion différentielle :

$$\dot{\varepsilon}^p \in \partial\psi_K(\sigma). \quad (4.11)$$

où $\partial\psi_K(\sigma)$ représente géométriquement le cône des sous normales à la surface de charge au point σ .